CONSIDÉRATIONS ARITHMÉTIQUES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR
S. MANDELBROJT

ABSTRACT

On indique l'influence du caractère arithmétique des exposants d'un développement de la forme $\Sigma d_n z^{\lambda_n}$ sur l'allure de la fonction correspondente.

Dans le plan de la variable complexe $z = x + iy = re^{i\theta}$ ($r = |z|$), nous appelons *courbe à astérisque*, et la désignons par une lettre majuscule surmontée, d'un astérisque, par exemple Γ^*, toute courbe de Jordan fermée, symétrique par rapport à l'axe réel, passant par le point $z = 1$, donnée par une fonction continue $r = \phi(\theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi(0) = \phi(2\pi)$), $\phi(\theta) > 0$, la fonction ϕ admettant une dérivée continue dans le voisinage de $\theta = 0$—dérivée satisfaisant à la condition

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{1}{\theta} = c,$$

c étant une quantité finie.

Δ étant un domaine (ouvert) quelconque contenant l'origine, nous désignons par $L\Delta$ la partie de la surface de Riemann de $\log z$ étalée sur Δ. Nous désignons par $D(\Gamma^*)$ le domaine borné dont Γ^* est la frontière. Ainsi $LD(\Gamma^*)$ est la partie de la surface de Riemann de $\log z$, étalée sur l'intérieur de Γ^*.

On dit qu'une courbe à astérisque G^* *abrite la courbe à astérisque* Γ^* si, pour tout $z \in \Gamma^*$, $z \neq 1$, on a $z \in D(G^*)$ et si, en écrivant sur G^*

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{1}{\theta} = c_1,$$

on a $c_1 > c$.

Soit $\Phi(z)$ une fonction holomorphe sur $|z| \leqq 1$, réelle pour z réel, avec $\Phi(1) = 1$, $\Phi'(1) > -1$ $\Phi(z) \neq 0$ pour $|z| < 1$. Une telle fonction est dite *rattachée à une*

Received November 17, 1967.

courbe à astérisque Γ^* si, pour $|z| < 1$, on a $z\Phi(z) \in D(\Gamma^*)$. Soit $\lambda > 0$; un entier $m \geqq 0$ est appelé *λ-utile de la fonction* Φ, si, en posant

$$(\Phi(z))^\lambda = a_0^{(\lambda)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(\lambda)} z^m,$$

on a: $a_m^{(\lambda)} \neq 0$. $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$ sont dits *distincts modulo un par rapport à* Φ si pour aucun couple $m \geqq 0$, $m' \geqq 0$, respectivement λ-utile et λ'-utile de la fonction Φ, on ne peut avoir la relation

$$\lambda - \lambda' = m' - m.$$

Soit $\mathscr{D}$ un domaine simplement connexe, contenat l'origine dont la frontière est donnée par $r = \phi_1(\theta)$ $(r > 0)$, ϕ_1 fonction continue sur $[0, 2\pi]$ $(\phi_1(0) = \phi_1(2\pi))$, et soit C un disque $|z| < R$, avec $C \subset \mathscr{D}$. $F(z)$ étant une fonction holomorphe sur LC (partie de la surface de Riemann de log z étalée sur C), nous disons que la fonction F peut être *prolongée analytiquement directement dans* $L\mathscr{D}$ (à partir de LC) si cette fonction peut être prolongée à partir de LC le long de tout segment de $L\mathscr{D}$ étalé sur un segment situé dans $\mathscr{D}$ et qui fait partie d'une demi-droite issue de l'origine. Nous ne considérons dans la suite que des prolongements analytiques directs dans un $L\mathscr{D}$ à partir d'un LC, avec $C \subset \mathscr{D}$.

Nous désignons par $\Lambda = \{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs, strictement croissants, tendant vers l'infini et par $\{d_n\}$ une suite de nombres complexes. S'il existe un $R > 0$ tel que $\sum |d_n| R^{\lambda_n} < \infty$, $\sum d_n z^{\lambda_n}$ converge sur LC (la partie de la surface de Riemann étalée sur C), où C est le disque $|z| < R$, vers une fonction holomorphe $F(z) = \sum d_n z^{\lambda_n}$.

Nous povons maintenant énoncer le théorème suivant dont la nature sera mieux saisie par les énoncés de ses cas particuliers (théorèmes 2, 3, 4, 5).

THÉORÈME 1. *Soit G^* une courbe à astérisque, Γ^* une courbe à astérisque abritée par G^*, et Φ la fonction rattachée à Γ^*.*

Supposons que pour un $R > 0$: $\sum |d_n| R^{\lambda_n} < \infty$, la série $\sum d_n z^{\lambda_n}$ pouvant être prolongée analytiquement (directement) à partir de LC, où C est le disque $|z| < R$, dans $LD(G^*)$.

Il existe une constante H, qui dépend uniquement de G^* et de Φ, telle que, pour tout λ_k, distinct modulo un par rapport à Φ de tous les autres λ_n, on a

$$|d_k| \leqq H \sup_{z \in LD(G^*)} |F(z)| \operatorname*{Inf}_m \left(\frac{1}{|a_m^{(\lambda_k)}|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right).$$

Rappelons qu'on pose

$$(\Phi(z))^\lambda = a_0^{(\lambda)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(\lambda)} z^m$$

dans le voisinage de l'origine.

Un choix particulier, d'une part, de la courbe Γ^*, et, d'autre part, de la fonction Φ qui lui est rattachée (choix qui permet de préciser les propriétés exigées de la suite Λ) fournit, à partir du théorème 1, les théorèmes suivants, pouvant être considérés comme ses cas particuliers.

THÈORÉME 2. *A toute courbe à astérisque G^*, abritant $|z| = 1$, correspond une constante B dépendant seulement de G^* telle que si pour un $R > 0$: $\sum |d_n| R^{\lambda_n} < \infty$, et si $F(z) = \sum d_n z^{\lambda_n}$ peut être prolongée analytiquement (directement) à partir de LC, où C est le disque $|z| < R$, dans $LD(G^*)$, l'inégalité suivante est satisfaite pour tout k*

(2) $$|d_k| \leqq B \sup_{z \in LD(G^*)} |F(z)| \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

THÉORÈME 3. *Supposons que la courbe à astérisque G^* abrite la courbe (à astérisque) définie par $|z| = \cos(\theta/3)(|\theta| \leqq \pi)$. Supposons que pour un $R > 0$: $\sum |d_n| R^{\lambda_n} < \infty$ et que $F(z) = \sum d_n z^{\lambda_n}$ peut être prolongée analytiquement (directement) à partir de LC, C étant le disque $|z| < R$, dans $D(G^*)$.*

Il existe une constante B_1 dépendant seulement de G^* telle que l'inégalité

(3) $$|d_k| \leqq B_1 \sup_{z \in LD(G^*)} |F(z)|$$

est valable pour tout λ_k tel que $\lambda_n - \lambda_k$ n'est un entier pour aucun n $(n \neq k)$.

THÉORÈME 4. *Si tous les λ_n sont entiers, en remplaçant dans l'énoncé du théorème 3 l'hypothèse concernant λ_k par l'hypothèse (satisfaite pour l'indice k donné)*

(4) $$\lambda_{k+1} > 2\lambda_k > 4\lambda_{k-1},$$

les autres hypothèses du théorème 3 étant conservées, on a l'inégalité

(5) $$|d_k| \leqq B_1 \sup_{z \in D(G^*)} |F(z)|.$$

THÉORÈME 5. *Les conclusions des théorèmes 3 et 4 restent valables si l'on remplace dans ces énoncés G^* par une courbe à astérisque G_1^* abritant la courbe à astérisque Γ^* composée de l'arc $|z| = \cos\theta/2$, $|\theta| \leqq \pi/2$, et de son symétrique par rapport à $0y$; la condition portant sur λ_k, dans le théorème 3, étant remplacée par la condition que pour $n \neq k$, $\lambda_k - \lambda_n$ n'est pas un entier pair; la condition portant sur λ_k, dans le théorème 4, étant remplacée par la condition $\lambda_{k+1} > 3\lambda_k > 9\lambda_{k-1}$, ou par la condition que la parité de λ_k est différente de celle des autres λ_n $(n \neq k)$.*

(La constante B_1 doit alors être remplacée par une autre constante ne dépendant que de G^*).

Avant d'aborder la démonstration du théorème 1, nous désirons démontrer que les théorèmes 2, 3, 4 et 5 peuvent être considérés comme des cas particuliers de ce théorème.

La courbe à astérisque Γ^* correspondant au théorème 1, est dans l'énoncé du théorème 2, le cercle $|z| = 1$, la fonction $\Phi(z)$ rattachée à cette courbe Γ^* étant la constante un; et, quel que soit $\lambda > 0$, seul l'entier $m = 0$ est λ-utile de la fonction $\Phi(z)$. Quels que soient n et m, λ_n et λ_m sont alors distincts modulo un par rapport à Φ (c'est-à-dire qu'ils sont distincts, tout court, la suite $\{\lambda_n\}$ étant strictement croissante). L'inegalité (2), qui traduit dans ce cas l'inégalité (1), est, par conséquent valable pour tout k.

La courbe (à astérisque) dans les énoncés des théorèmes 3 et 4, abritée par G^*, est la courbe Γ^* correspondant à l'énoncé du théorème 1; elle est le contour extérieur de l'image de $|z| = 1$ par $z\Phi(z) = z(1+z)/2$. Quel que soit $\lambda > 0$ — non entier, tout entier $m \geqq 0$ est λ-utile de Φ; et si λ est un entier, m est λ-utile de Φ chaque fois que $0 \leqq m \leqq \lambda$. En écrivant alors l'inégalité (1) sous la forme

$$|d_k| \leqq A \sup_{z \in LD(G^*)} |F(z)| \operatorname{Inf}_m \left(\frac{1}{|a_m^{(\lambda_k)}|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + m}} \right)$$

$$\leqq A \sup_{z \in LD(G^*)} |F(z)| \left(\left| a_{[\lambda_k/2]}^{(\lambda_k)} \right| \sqrt{\lambda_k + \left[\frac{\lambda_k}{2}\right]} \right)^{-1},$$

où $[a]$ désigne la partie entière de a, on obtient l'inégalité (3).

Dans le théorème 5, la courbe à astérisque Γ^* est le contour extérieur de l'image du cercle $|z| = 1$ par $z\Phi(z) = z(1+z^2)/2$. Le passage du théorème 1 au théorème 5 se fait à partir de ce point en suivant les raisonnements utilisés pour le passage du théorème 1 aux théorèmes 3 et 4.

Pour démontrer le théorème 1 il nous faut d'abord démontrer le lemme suivant:

LEMME. Γ^*, G^* *et* Φ *étant définis comme dans l'énoncé du théorème* 1, *désignons par* $P_\alpha (\alpha \geqq 0)$ *la courbe dans le plan* $z = re^{i\theta}$, *définie par* $r = e^{\alpha\theta^2}$, $|\theta| \leqq \pi$. *Pour* α *suffisamment petit, l'image de* P_α *par* $z\Phi(z)$ *est située sur* $\overline{D(G^*)}$.

(D'après les notations introduites plus haut, $\overline{D(G^*)}$ designé le compact dont G^* est la frontière).

Posons $\Phi_1(z) = z\Phi(z)$. Comme $\Phi_1(1) = 1$, $\Phi_1'(1) = 1 + \Phi'(1) = A > 0$, il existe un disque de centre $z = 1$ où $\Phi_1(z)$ est une fonction univalente; soit U_1 un tel disque. Il existe aussi un disque de centre $\zeta = 1$, où la fonction inverse de la fonction Φ_1, $\Phi_1^{-1}(\zeta)$, est univalente; soit U_2 un tel disque. Posons $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\gamma}$.

Désignons par Q_α l'image de P_α par Φ_1. A tout $\alpha \geqq 0$ on peut faire correspondre un $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$ et un $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$, assez petits, pour que, d'une part, la partie de Q_α qui est l'image (par $\zeta = \Phi_1(z)$) de l'arc de P_α correspondant à $0 \leqq \theta \leqq \varepsilon$, soit un arc de Jordan simple, J, liant le point $\zeta = 1$ à un point du demi-plan $\eta > 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$), et ceci sans repasser par l'axe réel; et pour que, d'autre part, le rayon, issu de l'origine ($\zeta = 0$), faisant l'angle γ avec l'axe $\eta = 0$, coupe J en un seul point p. La courbe, composée de la partie de ce rayon comprise entre l'origine et le point p, l'arc J et le segment de l'axe réel $0 \leqq \xi \leqq 1$, délimite alors un domaine simplement connexe D. On peut d'ailleurs choisir $\varepsilon(\alpha)$, $\gamma(\alpha)$ de telle sorte qu'on ait aussi $\gamma(\alpha) = \gamma(0)$ (ce qui est possible — il suffit de prendre $\gamma(\alpha)$ assez petit) et que le domaine compris entre les arcs Q_0 et Q_α, commençant au point $\zeta = 1$ et finissant au rayon (issu de l'origine) faisant avec $\eta = 0$ l'angle $\gamma(0) = \gamma(\alpha)$, soit contenu dans U_2. On peut aussi choisir $\varepsilon(\alpha)$ (qu'on peut d'ailleurs prendre égal à $\varepsilon(0)$) assez petit pour que les arcs correspondants de P_0 (qui n'est autre qu'un arc de $|z| = 1$) et de P_α soient contenus dans U_1. Un tel choix de α et des quantités correspondantes ε, γ étant effectué, nous appelons le domaine correspondant D: "un domaine D_α". L'image de D_α par Φ_1^{-1} sera désignée par D_α^*. La frontière d'un D_α^* est évidemment une courbe de Jordan fermée, simple.

Si α est suffisamment petit, on peut choisir le domaine D_α de telle sorte, qu'en désignant par R_α la partie de Q_α qui fait partie de la frontière de D_α, on ait $R_\alpha \subset \overline{D(G^*)}$.

Ceci résulte des considérations suivantes. L étant une courbe dans le plan ζ passant par le point $\zeta = 1$, pouvant s'exprimer au voisinage de ce point par $\rho = \rho(\gamma)$ (coordonnées polaires: un seul ρ pour $|\gamma|$ assez petit), et telle que la limite de $(1/\gamma)(d\rho/d\gamma)$ (finie) existe lorsque $\gamma \to 0$, nous désignerons cette limite par $c(L)$. Le fait que $R_\alpha \subset \overline{D(G^*)}$, pour α assez petit, résulte de l'inégalité, suivante, valable pour α assez petit:

$$c(R_\alpha) < c(G^*).$$

Posons, en effet

$$\frac{d \log \Phi_1(z)}{dz} = A(z) + iB(z).$$

On a:

$$\lim_{\theta \to 0} A(e^{\alpha\theta^2 + i\theta}) = 1 + \Phi'(1) = A > 0$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{dB(e^{\alpha\theta^2 + i\theta})}{d\theta} = \frac{\partial B}{\partial y}\Big]_{z=1} = \frac{\partial A}{\partial x}\Big]_{z=1} = A'(1),$$

$A(x)$ étant la restriction de $A(z)$ sur l'axe réel. En écrivant $A'(1) = A_1$, on voit facilement que

$$c(\Gamma^*) = -\frac{A_1}{A^2} - \frac{1}{A}, \qquad c(R_\alpha) = \frac{2\alpha}{A} - \frac{A_1}{A^2} - \frac{1}{A},$$

et, par définition: $c(G^*) > c(\Gamma)$. Il suffit donc que $\alpha > 0$ soit suffisamment petit pour qu'on ait $c(R_\alpha) < c(G^*)$.

Ainsi, avec un choix convenable de α, on a $\Phi_1(D_\alpha) \subset D(G^*)$.

Soit maintenant $0 < \alpha_1 < \alpha$. Si α_1 est suffisamment petit, l'image par Φ_1 de la partie de $D(P_{\alpha_1})$ qui est à l'extérieur de D_α et de son symétrique par rapport à l'axe réel, est certainement contenue dans $D(G^*)$. Mais il en est de même de l'image par Φ_1 de la partie de $D(P_{\alpha_1})$ qui est comprise dans D_α (et dans son symétrique). Ainsi, il existe un $\alpha_1 > 0$ tel que l'image par Φ_1 de $D(P_{\alpha_1})$ est dans $D(G^*)$. Le lemme est ainsi démontré.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. La fonction $\Phi(z)$ ne s'annule pas, d'après les hypothèses du théorème, dans $|z| < 1$ (voir la définition d'une fonction rattachée à une courbe Γ^*); elle est holomorphe sur $|z| \leqq 1$. Elle peut admettre des zéros sur $|z| = 1$: soient $z_1, \cdots, z_k$ les affixes de ces zéros. Choisissons maintenant $\alpha > 0$ assez petit pour que:

1°) $\Phi_1(D(P_\alpha)) \subset D(G^*)(\Phi_1(z) = z\Phi(z))$, ce qui est possible en vertu du lemme et pour que

2°) $\Phi(z)$ n'admette pas sur le disque fermé $|z| \leqq e^{\alpha\pi^2}$ d'autres zéros que les points z_j $(j = 1, 2, \cdots, k)$.

Désignons par L_j $(j = 1, 2, \cdots k)$ le rayon issu de l'origine, passant par le point z_j, et par s_j le segment de L_j compris entre z_j et P_α. Désignons par C_α la courbe composée de P_α et des k segments s_j $(j = 1, 2 \cdots k)$.

Désignons par Δ_α le compact dont C_α est la frontière, et considérons la fonction $\mathscr{F} = F \circ \Phi_1$

$$\mathscr{F}(z) = F(\Phi_1(z)).$$

Cette fonction est holomorphe sur $L\Delta_\alpha$, c'est-à-dire, sur la surface de Riemann de $\log z$ étalée sur Δ_α, et on a

$$\sup_{z \in L\Delta_\alpha} |\mathscr{F}(z)| \leqq \sup_{z \in LD(G^*)} |F(z)| = M.$$

On a, en effet, $\Delta_\alpha \subset D(G^*)$, Φ_1 n'admettant pas dans Δ_α d'autres zéros qu'un zéro simple à l'origine.

Posons

$$\Phi(z) = \sum a_m z^m$$

(c'est-à-dire, en suivant la notation de la page 3, $a_m = a_m^{(1)}$). On voit que pour $r > 0$, suffisamment petit

$$\sum_n |d_n| \left(r \sum_m |a_m| r^m\right)^\lambda < \infty,$$

ce qui permet d'écrire pour $|z|$ suffisamment petit

$$\mathscr{F}(z) = \sum_n d_n z^\lambda \ (\sum_m a_m z^m)^{\lambda_n} = \sum_n d_n \sum_m a_m^{(\lambda_n)} z^{m+\lambda_n} = \sum_{p \geqq 1} l_p z^{\mu_p},$$

où les μ_p sont de la forme $m + \lambda_n$, l_p étant alors la somme étendue à tous les termes $d_n a_m^{(\lambda_n)}$ pour lesquels $\mu_p = m + \lambda_n$.

On peut écrire pour tout $p \geqq 1$, r étant suffisamment petit:

$$l_p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathscr{F}(re^{i\theta}) r^{-\mu_p} e^{-i\mu_p\theta} d\theta.$$

Soit alors p tel que $\alpha\pi^2\mu_p \geqq 1$, et désignons par $P_{\alpha,p}$ la courbe composée de l'arc $\rho = e^{-1/\mu_p + \alpha\theta^2}$, $|\theta| \leqq \pi$, et les segments $s_{j,p}$, qui sont les parties, comprises entre cet arc et le cercle $|z| = 1$, des segments s_j; désignons par $P_{\alpha,p}^L$ la courbe sur $L\Delta_\alpha$ qui s'étale sur $P_{\alpha,p}$, et par $P_{\alpha,p,T}^L$ la partie de $P_{\alpha,p}^L$ sur laquelle $\mathrm{Im}(\log z) = \theta$ varie entre $-T$ et T.

Une application évidente du théorème de Cauchy permet d'écrire:

$$l_p = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2Ti} \int_{P_{\alpha,p,T}^L} \mathscr{F}(z) z^{-\mu_p} \, d\log z$$

l'intégrale étant prise sur les segments $s_{j,p}$ (lorsque $|\theta| \leqq T$) dans les deux sens.

L'évaluation du Sup de $|\mathscr{F}(z)|$ sur $L\Delta_\alpha$ permet alors d'écrire:

$$|l_p| \leqq \frac{M}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(\alpha\theta^2 - 1/\mu_p)\mu_p} d\theta + 2 \sum_{j=1}^{k} \int_0^{\alpha\theta_j^2 - \mu_p^{-1}} \rho^{-\mu_p} d\log\rho \right\}$$

où θ_j est l'argument de s_j.

Il en résulte que

$$|l_p| \leqq \frac{M}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{\mu_p(1/\mu_p - \alpha\theta^2)} d\theta + k \int_0^{\alpha\pi^2 - \mu_p^{-1}} \rho^{-\mu_p} d\log\rho \right\}.$$

On peut écrire pour $0 < \alpha < 1$ (et $\alpha\pi^2\mu_p > 1$):

$$\int_0^{\pi} e^{-\alpha\theta^2\mu_p} d\theta = \int_0^{\mu_p^{-\frac{1}{2}}} e^{-\alpha\theta^2\mu_p} \, d\theta + \int_{\mu_p^{-\frac{1}{2}}}^{\pi} e^{-\alpha\theta^2\mu_p} d\theta$$

$$\leqq \mu_p^{-\frac{1}{2}} + \mu_p^{\frac{1}{2}} \int_{\mu_p^{-\frac{1}{2}}}^{\pi} e^{-\alpha\theta^2\mu_p} \, \theta d\theta = \mu_p^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu_p^{\frac{1}{2}}}{2} \int_{\mu_p^{-1}}^{\pi^2} e^{-\mu_p\alpha y} dy$$

$$= \mu_p^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu_p^{\frac{1}{2}}}{2\mu_p\alpha} (e^{-\alpha} - e^{-\mu_p\pi^2\alpha}) \leqq A\mu_p^{-\frac{1}{2}},$$

où A est une constante finie.

On a aussi en partant de l'inégalité évidente $|l_p| \leqq M$, pour $\alpha\pi^2\mu_p \leqq 1$:

$$|l_p| \leqq M \leqq \frac{M}{\pi\alpha^{\frac{1}{2}}\mu_p^{\frac{1}{2}}}.$$

En définitive, quel que soit p, on a l'inégalité:

$$|l_p| \leqq K_\alpha M \mu_p^{-\frac{1}{2}}$$

où K_α dépend seulement de α.

Or, si λ_k est distinct modulo un par rapport Φ de tous les autres λ_n, et si $\mu_p = \lambda_k + m$, il n'existe aucun autre couple λ_n, m' ($n \neq k$, $m' \neq m$) tel que $\mu_p = \lambda_n + m'$(m et m' étant des entiers positifs). On a, par conséquent, d'après la définition de μ_p et l_p

$$\mu_p = \lambda_k + m \qquad l_p = d_k a_m^{(\lambda_k)}$$

et, l'inégalité démontrée pour les l_p donne

$$|d_k| \, |a_m^{(\lambda_k)}| \leqq K_\alpha M(\lambda_k + m)^{-\frac{1}{2}}.$$

La conclusion du théorème en résulte immédiatement.

Le théorème 3 peut être considéré comme une généralisation très poussée des théorèmes que j'ai démontrés dans [1], ainsi que d'un théorème d'Aronszajn [2], obtenu en partant de mon théorème démontre dans [1]. Dans ces théorèmes, anciens, on suppose que *tous* les λ_n sont distincts modulo un ($\lambda_n - \lambda_m \neq$ entier, si $n \neq m$). Voir pour ces anciens théorèmes [3].

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Mandelbrojt. Bull. Soc. Math. Fr. **60** (1932) 208.
2. N. Aronszajn. C.R. Académie des Sciences **199**, (1934) 335.
3. S. Mandelbrojt. Dirichlet Series, Rice Institute, Pamphlet 31, 1944.
4. ———, C.R. Académie des Sciences **254**, (1962) 3299.
5. ———, C.R. Académie des Sciences **262**, (1966) 819.

COLLEGE DE FRANCE